

محاسبات علمی

تجزیه QR

با استفاده از تبدیل هاوس هولدر

$$A = QR$$


Dr. Ali Valinejad

valinejad.ir
valinejad@umz.ac.ir



فهرست مطالب

- ❖ تبدیل هاوس هولدر
- ❖ کاربرد تبدیل هاوس هولدر
- ❖ تجزیه QR یک ماتریس با استفاده از تبدیل هاوس هولدر
- ❖ حل دستگاه $Ax=b$ با استفاده از تجزیه QR
- ❖ تجزیه QR یک ماتریس ماتریس مستطیلی



تبدیل هاوس هولدر

تعریف تبدیل (ماتریس) هاوس هولدر :

فرض کنید $v \in R^n$ یک بردار ستونی باشد که $\|v\|_2 \neq 1$ ، در این صورت، تبدیل (ماتریس) هاوس هولدر متناظر با v به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = I - \frac{2vv^T}{v^T v}$$

ضرب خارجی

ضرب داخلی

چند نکته:

❖ v را بردار هاوس هولدر نامند.

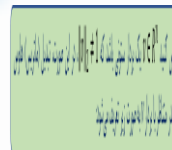
❖ $H = H^T$ یک ماتریس متقارن است. یعنی

❖ $HH^T = I$ یک ماتریس متعامد است. یعنی

$$\begin{aligned} HH^T &= \left(I - 2\frac{vv^T}{v^T v}\right) \left(I - 2\frac{vv^T}{v^T v}\right)^T \\ &= \left(I - 2\frac{vv^T}{v^T v}\right) \left(I - 2\frac{vv^T}{v^T v}\right) \\ &= I - 4\frac{vv^T}{v^T v} + 4\frac{vv^T}{v^T v} \frac{vv^T}{v^T v} = I - 4\frac{vv^T}{v^T v} + 4\frac{vv^T}{v^T v} \\ &= I \end{aligned}$$

❖ در صورتی که $\|v\|_2 = 1$ ، تبدیل (ماتریس) هاوس هولدر متناظر با بردار v به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = I - 2vv^T$$

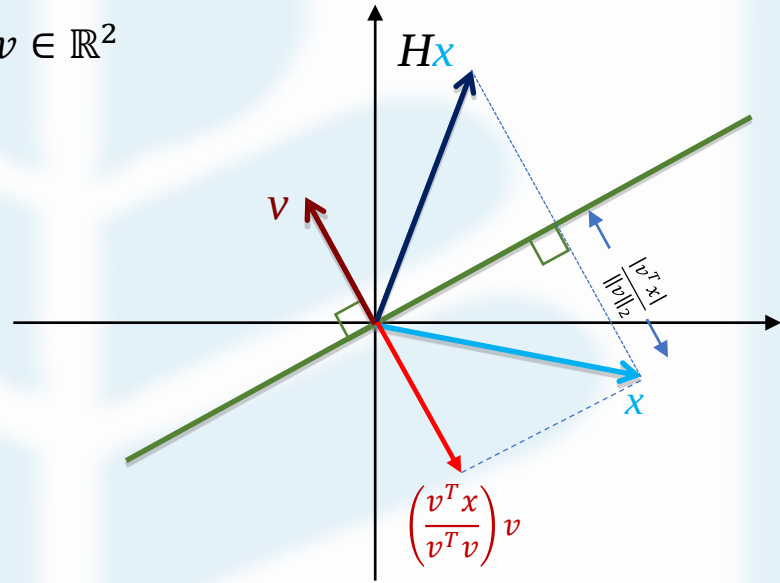


تبدیل هاوس هولدر

❖ ضرب ماتریس $H = I - \frac{2vv^T}{v^T v}$ در یک بردار سبب انعکاس (بازتاب) آن نسبت به امتداد خط عمود بر v می‌شود.

$$\begin{aligned} Hx &= \left(I - 2 \frac{vv^T}{v^T v} \right) x \\ &= x - 2 \frac{v(v^T x)}{v^T v} \\ &= x - 2 \frac{(v^T x)}{v^T v} v \end{aligned}$$

$$x, v \in \mathbb{R}^2$$



نکته:

$$\left\| \left(\frac{v^T x}{v^T v} \right) v \right\|_2 = \left| \left(\frac{v^T x}{v^T v} \right) \right| \|v\|_2 = \left| \frac{v^T x}{\|v\|_2^2} \right| \|v\|_2 = \frac{|v^T x|}{\|v\|_2}$$



کاربرد تبدیل هاوس هولدر

تبدیل هاوس هولدر برای صفر کردن عناصر یک بردار:

سوال: برای بردار مفروض $x \in \mathbb{R}^n$ ، بردار v را طوری بیابید که تبدیل هاوس هولدر H و اسکالر α را چنان تعریف کند که

$$Hx = \alpha e_1 = \alpha [1, 0, 0, \dots, 0]^T$$

جواب:

$$\begin{aligned} Hx = \alpha e_1 & \xrightarrow[\text{تبدیل هاوس هولدر}]{\text{بنابر تعریف}} \left(I - 2 \frac{vv^T}{v^T v} \right) x = \alpha e_1 \\ & \implies x - 2 \frac{vv^T}{v^T v} x = \alpha e_1 \implies x - 2 \frac{v x^T}{v^T v} v = \alpha e_1 \\ & \xrightarrow[\mu := 2 \frac{v x^T}{v^T v}]{\implies} x - \mu v = \alpha e_1 \implies v = (x - \alpha e_1) / \mu \end{aligned}$$

مقدار $\|v\|_2$ تاثیری روی H ندارد، لذا، بدون این که خللی به کلیت مساله وارد شود مقدار ۱ را برای μ انتخاب می کنیم. بنابراین

$$v = x - \alpha e_1 \quad (1)$$

با توجه به صورت سوال، $\|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|$ ، اما به راحتی می توان ثابت نمود که $\|Hx\|_2 = \|x\|_2$. در نتیجه

$$\|x\|_2 = \|\alpha\|_2 \implies \alpha = \pm \|x\|_2$$

برای اجتناب از $v \approx 0$ و حذف ارقام با معنی، مقدار زیر را برای α انتخاب می کنیم

$$\alpha = -\text{sign}(x_1) \|x\|_2$$

در نتیجه

$$v = x + \text{sign}(x_1) \|x\|_2 e_1$$



کاربرد تبدیل هاوس هولدر

تبدیل هاوس هولدر برای صفر کردن عناصر یک بردار:

سوال: برای بردار مفروض $x \in \mathbb{R}^n$ ، بردار v را طوری بیابید که تبدیل هاوس هولدر H و اسکالر α را چنان تعریف کند که

$$Hx = \alpha e_1 = \alpha [1, 0, 0, \dots, 0]^T$$

الگوریتم:

ورودی: بردار $x \in \mathbb{R}^n$

خروجی: بردار $v \in \mathbb{R}^n$ و اسکالر α

گام (۱) تعریف کنید:

$$\alpha = -\text{sign}(x_1) \|x\|_2$$

گام (۲) قرار دهید:

$$v = x - \alpha e_1$$



$$Hx = x - 2 \frac{vv^T}{v^T v} x = \alpha e_1$$



کاربرد تبدیل هاوس هولدر

تبدیل هاوس هولدر برای صفر کردن عناصر یک بردار:

مثال: برای بردار مفروض $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، بردار v را طوری بیابید که تبدیل هاوس هولدر H و اسکالر α را چنان تعریف کند که

$$Hx = \alpha e_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الگوریتم:

گام (۱)

$$\alpha = -\text{sign}(x_1) \|x\|_2 \implies \alpha = -3$$

گام (۲)

$$v = x - \alpha e_1 \implies v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - (-3) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Hx = x - 2 \frac{vv^T}{v^T v} x = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



کاربرد تبدیل هاوس هولدر

تبدیل هاوس هولدر برای صفرکردن عناصر یک بردار:

مثال: برای ماتریس مفروض $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ بردار v را طوری بیابید که تبدیل هاوس هولدر H و اسکالر α را چنان تعریف کند که

$$HA = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$

الگوریتم:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

گام (۱) قرار دهید

$$\alpha = -\text{sign}(x_1) \|x\|_2 \implies \alpha = -3$$

گام (۲)

$$v = x - \alpha e_1 \implies v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - (-3) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

گام (۳)

$$\implies HA = A - 2 \frac{vv^T}{v^T v} A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$



کاربرد تبدیل هاوس هولدر

تبدیل هاوس هولدر برای صفر کردن عناصر یک بردار:

تمرین: برای بردار مفروض $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، بردار v را طوری بیابید که تبدیل هاوس هولدر H و اسکالرهای α و β را چنان تعریف کند که

$$Hx = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$



تجزیه QR یک ماتریس با استفاده از تبدیل هاوس هولدر

قضیه تجزیه QR: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ دلخواه باشد. آنگاه ماتریس متعامد Q و ماتریس بالا مثلثی R وجود دارند به طوری که $A=QR$.

اثبات (ساختاری):

گام ۰: قرار دهید:

$$A^{(0)} := A$$

گام ۱: با استفاده از عناصر ستون اول ماتریس A ، تبدیل هاوس هولدر H_1 را طوری بسازید که عناصر زیر قطر اصلی از ستون اول ماتریس $A^{(1)}$ صفر شوند.

$$A^{(1)} = H_1 A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & \cdots & a_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix}$$



تجزیه QR یک ماتریس با استفاده از تبدیل هاوس هولدر

ادامه اثبات

قضیه تجزیه QR: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ دلخواه باشد. آنگاه ماتریس متعامد Q و ماتریس بالا مثلثی R وجود دارند به طوری که $A=QR$.

اثبات (ساختاری):

گام ۲: با استفاده از عناصر ستون دوم ماتریس $A^{(1)}$ ، تبدیل هاوس هولدر H_2 را طوری بسازید که که عناصر زیر قطر اصلی از ستون دوم ماتریس $A^{(2)}$ صفر شوند.

$$A^{(2)} = H_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1^T \\ \hat{e}_2^T \\ \hat{e}_3^T \\ \vdots \\ \hat{e}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_{1,2}^{(2)} & a_{1,3}^{(2)} & \cdots & a_{1,n}^{(2)} \\ 0 & a_2 & a_{2,3}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix}$$



تجزیه QR یک ماتریس با استفاده از تبدیل هاوس هولدر

ادامه اثبات

قضیه تجزیه QR: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ دلخواه باشد. آنگاه ماتریس متعامد Q و ماتریس بالا مثلثی R وجود دارند به طوری که $A=QR$.

اثبات (ساختاری):

گام k : با استفاده از عناصر ستون k ام ماتریس $A^{(k-1)}$ ، تبدیل هاوس هولدر H_k را طوری بسازید که که عناصر زیر قطر اصلی از ستون k ام ماتریس $A^{(k)}$ صفر شوند.

$$A^{(k)} = H_k A^{(k-1)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}^{(k)} & a_{1,k}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{1,n}^{(k)} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{k,k}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$A^{(k)} = H_k A^{(k-1)} = H_k H_{k-1} A^{(k-2)} = \cdots = H_k \cdots H_2 H_1 A$$



تجزیه QR یک ماتریس با استفاده از تبدیل هاوس هولدر

ادامه اثبات

قضیه تجزیه QR: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ دلخواه باشد. آنگاه ماتریس متعامد Q و ماتریس بالا مثلثی R وجود دارند به طوری که $A=QR$.

اثبات (ساختاری):

گام 1 - n : با استفاده از عناصر ستون $n - 1$ ام ماتریس $A^{(n-2)}$ ، تبدیل هاوس هولدر H_{n-1} را طوری بسازید که که عناصر زیر قطر اصلی از ستون $n - 1$ ام ماتریس $A^{(n-1)}$ صفر شوند.

$$A^{(n-1)} = H_{n-1} \cdots H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} a_1 & a_{1,2}^{(n-1)} & a_{1,3}^{(n-1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(n-1)} & a_{1,n}^{(n-1)} \\ 0 & a_2 & a_{2,3}^{(n-1)} & \vdots & a_{2,n-1}^{(n-1)} & a_{2,n}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$



تجزیه QR یک ماتریس با استفاده از تبدیل هاوس هولدر

ادامه اثبات

قضیه تجزیه QR: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ دلخواه باشد. آنگاه ماتریس متعامد Q و ماتریس بالا مثلثی R وجود دارند به طوری که $A=QR$.

اثبات (ساختاری):

قرار دهید:

$$R := A^{(n-1)}$$

$$\implies R = H_{n-1}H_{n-2} \dots H_1A$$

$$\implies A = (H_{n-1}H_{n-2} \dots H_1)^{-1}R$$

$$\implies A = H_1^{-1}H_2^{-1} \dots H_{n-1}^{-1}R$$

$$\xrightarrow{H_k^{-1}=H_k^T} A = H_1^T H_2^T \dots H_{n-1}^T R$$

$$\xrightarrow{H_k^T=H_k} A = H_1H_2 \dots H_{n-1}R$$

قرار دهید:

$$Q := H_1H_2 \dots H_{n-1}$$

از این که ماتریس های هاوس هولدر متعامد و متقارنند، نتیجه می شود که ماتریس Q نیز متعامد است. لذا

$$A = QR \quad \blacksquare$$



تجزیه QR یک ماتریس با استفاده از تبدیل هاوس هولدر

الگوریتم ساخت ماتریس H_k در گام k ($k=1,2,\dots,n-1$)

ورودی: ستون k ماتریس $A^{(k-1)}$

خروجی: تبدیل هاوس هولدر H_k

گام (۱) تعریف کنید:

$$w = \left[\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, a_{k,k}^{(k-1)}, a_{k+1,k}^{(k-1)}, \dots, a_{n,k}^{(k-1)} \right]^T \in \mathbb{R}^n$$

گام (۲) قرار دهید:

$$\alpha_k = -\text{sign}(a_{k,k}^{(k-1)}) \|w\|_2$$

گام (۳) قرار دهید:

$$v = w - \alpha_k e_k$$

گام (۴) قرار دهید:

$$H = I - 2 \frac{vv^T}{v^T v}$$



تجزیه QR یک ماتریس با استفاده از تبدیل هاوس هولدر

مثال: ماتریس A را به صورت $A=QR$ تجزیه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: طبق الگوریتم تجزیه QR، تعداد گام‌های لازم برای تجزیه برابر $n-1=3-1=2$ است.

گام ۰:

$$A^{(0)} := A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

گام ۱:

$k=1$

$$w := \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha_1 = -\text{sign}(w_1) \|w\|_2} \alpha_1 = -6 \xrightarrow{v = w - \alpha_1 e_1} v = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - (-6) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_1 = I - 2 \frac{vv^T}{v^T v} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{(1)} = H_1 A^{(0)} = \begin{bmatrix} -6 & -7 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & \frac{28}{15} \\ 0 & 3 & -\frac{4}{15} \end{bmatrix}$$



تجزیه QR یک ماتریس با استفاده از تبدیل هاوس هولدر

ادامه حل

مثال: ماتریس A را به صورت $A=QR$ تجزیه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

گام ۲:

$k=2$

$$A^{(1)} = H_1 A^{(0)} = \begin{bmatrix} -6 & -7 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & \frac{28}{15} \\ 0 & 3 & -\frac{4}{15} \end{bmatrix} \Rightarrow w := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha_2 = -\text{sign}(w_2) \|w\|_2} \alpha_2 = \sqrt{10}$$

$$\xrightarrow{v = w - \alpha_2 e_2} v = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \sqrt{10} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 - \sqrt{10} \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_2 = I - 2 \frac{vv^T}{v^T v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3162 & 0.9487 \\ 0 & 0.9487 & 0.3162 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{(2)} = H_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} -6 & -7 & -0.6667 \\ 0 & 3.1623 & -0.8433 \\ 0 & 0 & 1.6865 \end{bmatrix}$$



تجزیه QR یک ماتریس با استفاده از تبدیل هاوس هولدر

ادامه حل

مثال: ماتریس A را به صورت $A=QR$ تجزیه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

قرار دهید:

$$R := A^{(2)} = \begin{bmatrix} -6 & -7 & -0.6667 \\ 0 & 3.1623 & -0.8433 \\ 0 & 0 & 1.6865 \end{bmatrix}$$

قرار دهید:

$$Q := H_1 H_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3162 & 0.9487 \\ 0 & 0.9487 & 0.3162 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6667 & -0.5271 & -0.5270 \\ -0.3333 & -0.4216 & 0.8433 \\ -0.6667 & 0.7379 & 0.1054 \end{bmatrix}$$

لذا

$$A = QR$$



استفاده از تجزیه $A=QR$ برای حل دستگاه $Ax=b$

$$\begin{array}{l} Ax = b \\ A=QR \end{array} \Rightarrow QRx=b \xrightarrow{Q^{-1}=Q^T} Rx=Q^T b \xrightarrow{b':=Q^T b} Rx = b'$$

الگوریتم حل دستگاه $Ax=b$ با استفاده از تجزیه $A=QR$

ورودی: ماتریس های A و بردار b

خروجی: بردار جواب x

گام ۱: محاسبه تجزیه $A=QR$

گام ۲: محاسبه $b' = Q^T b$

گام ۳: حل دستگاه بالا مثلثی $Rx = b'$ با استفاده از روش جایگذاری پسرو

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b'_n}{r_{nn}} \\ x_i &= \frac{b'_i - \sum_{j=i+1}^n r_{ij}x_j}{r_{ii}}, \quad \text{for } i = n-1, \dots, 1 \end{aligned}$$



استفاده از تجزیه $A=QR$ برای حل دستگاه $Ax=b$

تمرین: دستگاه مقابل را با استفاده از تجزیه $A=QR$ حل کنید.

$$+4x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 7$$

$$+2x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 5$$

$$+4x_1 + 7x_2 + 0x_3 = 11$$

جواب:

گام ۱: محاسبه تجزیه $A=QR$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6667 & -0.5271 & -0.5270 \\ -0.3333 & -0.4216 & 0.8433 \\ -0.6667 & 0.7379 & 0.1054 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -7 & -0.6667 \\ 0 & 3.1623 & -0.8433 \\ 0 & 0 & 1.6865 \end{bmatrix}$$

گام ۲: محاسبه $b' = Q^T b$

$$b' = \begin{bmatrix} -0.6667 & -0.5271 & -0.5270 \\ -0.3333 & -0.4216 & 0.8433 \\ -0.6667 & 0.7379 & 0.1054 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.6667 \\ 2.3190 \\ 1.6865 \end{bmatrix}$$

گام ۳: حل دستگاه بالا مثلی $Rx = b'$ با استفاده از روش جایگذاری پسرو

$$x_3 = \frac{1.6865}{1.6865} = 1$$

$$x_2 = \frac{2.3190 - (-0.8433)(1)}{3.1623} = 1$$

$$x_1 = \frac{-13.6667 - (-7)(1) - (-0.6667)(1)}{-6} = 1$$



مراجع

- 1- ***Numerical Linear Algebra and Applications***, Biswa Nath Datta, 1995.
- 2- ***<https://www.slideserve.com>***
- 3- ***<http://slideplayer.com>***

